Transformación Canónica para el Oscilador Armónico

Nicolás Quesada

Se tiene la transformación

$$a = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \tag{1a}$$

$$a^* = \frac{m\omega q - ip}{\sqrt{2m\omega}}. \tag{1b}$$

Se pide mostrar que la transformación $(q, p) \longmapsto (a, ia^*)$ es canónica y exhibir su función generatriz.

Las ecuaciones (1a) y (1b) pueden ser invertidas para obtener:

$$q = \frac{a + a^*}{\sqrt{2m\omega}}, \tag{2a}$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,(a^* - a). \tag{2b}$$

Se buscará una función generatriz de primer tipo. Con ella se pueden escribir las ecuaciones auxiliares

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \tag{3a}$$

$$ia^* = -\frac{\partial F_1}{\partial a}. \tag{3b}$$

De la ecuación que define a a se puede obtener a p en terminos de a y q asi

$$p = i\left(mq\omega - \sqrt{2m\omega}a\right) \tag{4}$$

y sustituirlo en la primera ecuación auxiliar e integrar para obtener

$$F_1 = i\left(\frac{1}{2}mq^2\omega - aq\sqrt{2m\omega}\right) + h(a). \tag{5}$$

La anterior ecuación se puede derivar parcialmente con respecto a a y compararla con la segunda ecuación auxiliar (de la ecuación que define a q en terminos de a y a^* podemos despejar esta última)

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = h'(a) - iq\sqrt{2m\omega} = -ia^* = i\left(a - q\sqrt{2m\omega}\right), \tag{6}$$

para obtener

$$h'(a) = ia \longrightarrow h(a) = \frac{1}{2}ia^2. \tag{7}$$

Finalmente la función buscada es

$$F_1 = \frac{1}{2} i \left(a^2 - 2a\sqrt{2m\omega}q + mq^2\omega\right). \tag{8}$$

Con lo anterior se ve que la transformación dada por (1a) y (1b) es canónica. Veamos como queda el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de las nuevas variables canónicas (a, ia^*).
El hamiltoniano del oscilador armónico en las variables (q, p) es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \tag{9}$$

Por otro lado el Hamiltoniano transformado es

$$H'(a, a^*) = H(a, a^*) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{10}$$

Además tenemos que

$$a^* a = \frac{H}{\omega} \Longrightarrow H = \omega a^* a \tag{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

Finalmente

$$H' = \omega a^* a. \tag{13}$$

Como (a, ia^*) son variables canónicas se cumple que $\{a, ia^*\} = 1$ y que su dinámica está dada por las ecuaciones de Hamilton. Con lo anterior es directo calcular las ecuaciones de movimento del sistema:

$$\frac{d}{dt} a = \{a, \omega a^* a\} = \omega\left(\{a, a^*\}a + a^*\{a, a\}\right) = -i\omega a, \tag{14a}$$

$$\frac{d}{dt} a^* = \{a^*, \omega a^* a\} = \omega\left(\{a^*, a^*\}a + a^*\{a^*, a\}\right) = i\omega a^*, \tag{14b}$$

y su solución

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} \tag{15a}$$

$$a^*(t) = a^*(0)e^{i\omega t} \tag{15b}$$